数理解析研究所講究録
930 巻 1995 年 84-89

算術化された完全性定理の応用について

神戸大・自然　菊池 誠 (MAKOTO KIKUCHI)

完全性定理を算術の言語で表現し，PA の上で証明できるというのが算術化された完全性定理である．Kreisel はその算術化された完全性定理を用いて第一および第二不完全性定理を証明しており ([Kr], [Sm])，最近，この Kreisel の証明で用いられた手法をさらに応用した新しい不完全性定理の証明も得られている ([Ki1], [Ki2], [Ko])．こうした算術化された完全性定理と Gödel 自身による証明との一番大きな違いは，Gödel 自身による証明が純粋にシンタクティカルなものであるのに対し，算術化された完全性定理を用いた証明では算術のモデルが積極的に用いられていることにある．

素朴な意味で，モデルとは集合論的な概念である．不完全性定理がいわゆる有限の立場と関係を持つことを考えれば，モデルを必要としない証明が知られているのに，さらにモデルを用いる証明を求めることの意義は少ないとも言える．また，モデルを用いた証明であっても，その証明は Gödel 数や，対角化定理，もしくは何らかの意味で対角化定理に対応する議論を用いており,「新しい証明」といったときに，どのような意味で新しいのかも明確ではない．しかし一方で，モデルを用いることにより議論の見通しが良くなる場合がある．

この小文では，算術化された完全性定理を用いた第二不完全性定理の証明をひとつ紹介し，さらに，算術化された完全性定理を用いて証明可能性述語に関する Solovay の完全性定理と算術の超準モデルの関係についての考察をする．

$\mathcal{L}_A = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ を算術の言語とし，$\ulcorner\urcorner$ を $\mathcal{L}_A$ 上の Gödel numbering とする．T を帰納的に公理化可能な $\mathcal{L}_A$ の理論として，$\mathrm{Pr}_T(x)$ を「x は T から証明可能な $\mathcal{L}_A$ の論理式の Gödel 数である」ということを意味する $\mathcal{L}_A$ の論理式，$\mathrm{Con}(T)$ を「T は無矛盾である」ということを意味する $\mathcal{L}_A$ の論理式とする．$\phi(x)$ が $\mathcal{L}_A$ の論理式のとき，ϕ が T のモデルを定めるということを意味する $\mathcal{L}_A$ の論理式を $\mathrm{Mod}_T(\phi)$ と書く．即ち，

定義 1. 「$\phi(x)$ を満たす x の全体が T の完全な Henkin 拡大の元の Gödel 数全体を成す」ということを意味する $\mathcal{L}_A$ の論理式を $\mathrm{Mod}_T(\phi)$ と書く．

算術化された完全性定理とは次の定理である．

定理 2.（**算術化された完全性定理**）．$\mathcal{L}_A$ の論理式 $\mathrm{Tr}_T(x)$ が存在して，

$$\mathrm{PA} + \mathrm{Con}(T) \vdash \mathrm{Mod}_T(\mathrm{Tr}_T).$$

算術化された完全性定理は任意の帰納的に公理化かのうな理論に適用できるが，算術の理論の場合には，より使いやすい形に直せる．

定義 3. (1) $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ を PA のモデルとする．$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$ かつ，任意の $\mathfrak{M}$ の元 a と $\mathfrak{M}'$ の元 b について $\mathfrak{M}' \models a < b$ が成り立つとき，$\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}$ の end-extension であるといい，$\mathfrak{M} \subseteq_e \mathfrak{M}'$ と書く．

(2) $\mathfrak{M}$ を PA のモデルとし，$\mathfrak{M}'$ を $\mathfrak{M} \subseteq_e \mathfrak{M}'$ を満たす $\mathcal{L}_A$ の理論 T のモデルとする．$\mathcal{L}_A$ の論理式 $\mathrm{Tr}_T(x)$ が存在して次の 2 条件が成立するとき $\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}$ 上で定義可能な T のモデルといい，$\mathfrak{M} \subseteq_d^T \mathfrak{M}'$ と書く．
(i) 任意の算術の sentence ϕ について

$$\mathfrak{M}' \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \mathrm{Tr}_T(\ulcorner \phi \urcorner).$$

(ii) 任意の算術の sentence ϕ について

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \phi \urcorner) \Rightarrow \mathfrak{M}' \models \phi.$$

条件 (i) は $\mathfrak{M}'$ 上の真偽は全て $\mathfrak{M}$ の上で定められていることを意味する．条件 (ii) は $\mathfrak{M}$ の上で T から証明可能な論理式はすべて $\mathfrak{M}'$ の上で正しい，すなわち $\mathfrak{M}$ の上でみたときに $\mathfrak{M}'$ が T のモデルになることを意味する．T が文脈から明らかなときは $\subseteq_d^T$ を単に $\subseteq_d$ と書く．

次の定理は算術化された完全性定理を算術の理論の場合に適用して得られる．実用上（つまり，不完全性定理を証明するとき）は，この形の方が使い易い．

定理 4. $\mathfrak{M}$ を PA モデルとする．このとき以下は同値．
(1) $\mathfrak{M} \models \mathrm{Con}(T)$.
(2) T のモデル $\mathfrak{M}'$ が存在して，$\mathfrak{M} \subseteq_d \mathfrak{M}'$.

[Kr], [Sm], [Ki], [Ko] では定理 4 が用いられている．以下で算術化された完全性定理を用いた第二不完全性定理の証明を紹介するが，そのために次の補題を用意する．

補題 5. 任意の PA のモデル $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ について,
(1) $\mathfrak{M} \not\subseteq_d \mathfrak{M}$,
(2) $\mathfrak{M} \subseteq_d \mathfrak{M}'$ かつ $\mathfrak{M}' \subseteq_d \mathfrak{M}''$ ならば $\mathfrak{M} \subseteq_d \mathfrak{M}''$.

証明. (1) $\mathfrak{M} \subseteq_d \mathfrak{M}$ とする. このとき $\mathcal{L}_A$ の論理式 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{PA}}(x)$ が存在して, 任意の $\mathcal{L}_A$ の sentence ϕ について

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{Tr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \phi \urcorner) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi.$$

一方, 対角化定理より, $\mathcal{L}_A$ の sentence σ が存在して

$$\mathrm{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow \neg \mathrm{Tr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \sigma \urcorner).$$

矛盾.

(2) $\mathfrak{M} \subseteq_d \mathfrak{M}'$ かつ $\mathfrak{M}' \subseteq_d \mathfrak{M}''$ とする. このとき, $\mathcal{L}_A$ の論理式 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{PA}}(x)$, $\mathrm{Tr}'_{\mathrm{PA}}(x)$ が存在して, 任意の $\mathcal{L}_A$ の sentence ϕ について

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{Tr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \phi \urcorner) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \phi$$
$$\mathfrak{M}' \models \mathrm{Tr}'_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \phi \urcorner) \Leftrightarrow \mathfrak{M}'' \models \phi.$$

よって,

$$\mathrm{Tr}''_{\mathrm{PA}}(x) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \mathrm{Tr}'_{\mathrm{PA}}(x) \urcorner)$$

とおけば, 任意の $\mathcal{L}_A$ の sentence ϕ について

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{Tr}''_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \phi \urcorner) \Leftrightarrow \mathfrak{M}'' \models \phi.$$

また, $\mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(x)$ は Σ_1 論理式, $\mathfrak{M} \subseteq_e \mathfrak{M}'$ なので, 任意の $\mathcal{L}_A$ の sentence ϕ について $\mathfrak{M} \models \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \phi \urcorner)$ ならば $\mathfrak{M}' \models \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \phi \urcorner)$ となり, $\mathfrak{M}'' \models \phi$. ゆえに $\mathfrak{M} \subseteq_d \mathfrak{M}''$. □

次の第二不完全性定理の証明は Jech [Je] によるものである. ([Je] の証明は集合論に対する第二不完全正定理の証明であり, そこでは算術化された完全性定理ではなく, 完全性定理そのものが用いられている. ここで紹介する証明は, Jech の証明を算術の理論の場合に書き直したものである.)

定理 6. PA が無矛盾ならば, Con(PA) を成り立たせない PA のモデルが存在.

証明. PA が無矛盾で, PA の任意のモデルの上で Con(PA) が成り立つとする. 矛盾を導きたい. まず, 対角化定理より

$$\mathrm{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \sigma \urcorner)$$

を満たす $\mathcal{L}_A$ の sentence σ が存在. 今, $\mathfrak{M}$ を PA のモデルとしたとき, $\mathfrak{M} \models \sigma$ のとき $\mathfrak{M}$ は「正」であるといい, そうでないとき $\mathfrak{M}$ は「負」であるということにする.

PA は無矛盾なので, 完全性定理により PA のモデル $\mathfrak{M}_1$ が存在. もし $\mathfrak{M}_1$ が正ならば $\mathfrak{M}_1 \models \neg \mathrm{Pr}_{PA}(\ulcorner \sigma \urcorner)$ なので $\mathfrak{M}_1 \models \mathrm{Con}(\mathrm{PA} + \neg\sigma)$. よって定理 4 から $\mathfrak{M}_1 \subseteq_d \mathfrak{M}_2$ を満たす $\mathrm{PA} + \neg\sigma$ のモデル $\mathfrak{M}_2$ が存在する. このとき, 明らかに $\mathfrak{M}_2$ は負. もしも $\mathfrak{M}_1$ が負のときは $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1$ とする. いずれにせよ, 負のモデル $\mathfrak{M}_2$ が存在.

任意の PA のモデルの上で Con(PA) が成り立つので $\mathfrak{M}_2 \models \mathrm{Con}(\mathrm{PA})$. よって, 再び定理 4 から $\mathfrak{M}_2 \subseteq_d \mathfrak{M}_3$ を満たす PA のモデル $\mathfrak{M}_3$ が存在. $\mathfrak{M}_2$ は負なので $\mathfrak{M}_2 \models \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \sigma \urcorner)$. よって $\mathfrak{M}_3 \models \sigma$ となり, $\mathfrak{M}_3$ は正. 同じ操作をもう一度繰り返すことによって, $\mathfrak{M}_3 \subseteq_d \mathfrak{M}_4$ を満たす PA の負モデル $\mathfrak{M}_4$ が存在.

さて, 補題 5 より, $\mathfrak{M}_2 \subseteq_d \mathfrak{M}4$. $\mathfrak{M}_2 \models \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \sigma \urcorner)$ なので $\mathfrak{M}_4 \models \sigma$. よって $\mathfrak{M}_4$ は正. 矛盾. □

この定理と完全性定理から第二不完全性定理が得られる.

系 7 (第二不完全性定理). PA が無矛盾ならば $PA \nvdash \mathrm{Con}(\mathrm{PA})$.

$\mathcal{M} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \models \mathrm{PA}\}$ とする. このとき, $\subseteq_d$ は $\mathcal{M}$ 上で定義される二項関係と見ることができる. Solovay の証明可能性述語に関する完全性定理から, この二項関係についての情報が得られる.

Solovay の定理とは, $\mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(x)$ の持つ様相性を公理的に示すものである.

定義 8. 以下の言語, 公理, 推論規則よりなる形式的体系を PRL という.

(1) 言語：
propositional variables: $p_0, p_1, p_2, \ldots,$
propositional connectices: $\Box$.

(2) 公理：すべての tautology,
$\Box A \wedge \Box(A \to B) \to \Box B,$
$\Box A \to \Box\Box A,$
$\Box(\Box A \to A) \to \Box A.$

(3) 推論規則：
$A, A \to B \vdash B$,
$A \vdash \Box A$.

定義 9. PRL の sentence の集合から $\mathcal{L}_A$ の sentence の集合への写像 $(\ )^*$ で，任意の PRL の sentence A, B について，

$$(\Box A)^* = \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \phi \urcorner),$$
$$(A \wedge B)^* = A^* \wedge B^*$$

などの条件を満たすものを interpretation という．

定理 10 (Solovay). 任意の PRL の sentence A について，以下は同値．
(1) $\mathrm{PRL} \vdash A$.
(2) 任意の interpretation $(\ )^*$ について，$\mathrm{PA} \vdash A^*$.

(1) $\Rightarrow$ (2) は易しい．(証明図の長さに関する帰納法.) (2) $\Rightarrow$ (1) が本質的である．Solovay は対偶を証明した．すなわち，A が PRL から証明可能でないとき，ある interpretation $(\ )^*$ が存在して，$\mathrm{PA} \nvdash A^*$ となることを示ししている．その証明では PRL の Kripke モデルが用いられている．PRL から A が証明可能でないとき，A を成り立たせない PRL の Kripke モデルが存在する．Solovay はそのモデルをもとに interpretation を構成した．その interpretation の構成に用いられるのが次の補題である．

n を自然数とし，$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．$\rhd$ を X 上の transitive, well-founded な二項関係とし，任意の $i \in X$ について $0 \rhd i$ と定める．

補題 13 (Solovay). 以下の条件を満たす $\mathcal{L}_A$ の論理式 $\mathcal{L}(x)$ が存在する．
(1) $\mathrm{PA} \vdash \exists 1 L(x) \wedge \forall x(L(x) \to 0 \leq x \leq n)$.
(2) $\mathbb{N} \models L(0)$.
(3) 任意の $i = 0, 1, \ldots, n$ について，$\mathrm{PA} + L(i)$ は無矛盾．(4) $0 \leq i, j \leq n, i \rhd j$ のとき，

$$\mathrm{PA} \vdash L(i) \to \mathrm{Con}(\mathrm{PA} + L(j)).$$

(5) $1 \leq i, j \leq n, i \not\rhd j$ のとき，

$$\mathrm{PA} \vdash L(i) \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \neg L(j) \urcorner).$$

集合 X とその上の二項関係 $\rhd$ が A を成り立たせないモデルのフレームに対応している．Solovay はフレームを元に論理式を構成し，その論理式を用いて，フレームの上での validity から interpretation を作っている．

算術化された完全性定理から，X の元，即ち A を成り立たせないモデルを構成する「世界」がPA のモデルに対応している．

系 14. $1 \leq i, j \leq n, \mathfrak{M} \models \mathrm{PA} + L(i)$ とする．このとき，以下は同値．
(1) $i \rhd j$.
(2) $\mathfrak{M} \subseteq_d \mathfrak{M}'$ を満たす $\mathfrak{M}' \models \mathrm{PA} + L(j)$ が存在．

$(\mathcal{M}, \subseteq_d)$ を考える．$\mathcal{M}$ の元は，Con(PA) を成り立たせるものと，成り立たせないものの二つに分類できる．成り立たせるモデルの後には，別のモデルが続いている．成り立たせないモデルの後には，何も無い．$\subseteq_d$ の連鎖はそこで終わる．前に紹介した Jech の証明は，この $\subseteq_d$ の連鎖が終わる直前の辺りがどうなっているのかを話題にしている．上の系も同じことを話題にしているが，そこから得られる情報ははるかに多い．つまり，$(X, \rhd)$ が与えられたとき，$(\mathcal{M}, \subseteq_d)$ は「終わりの方」では，ある意味で一様に，その $(X, \rhd)$ と同じ構造をもつことが分かる．このことはとても興味深い．しかし一方で，それは Solovay の補題を仮定すれば自明なことでしかなく，その意味ではつまらない．

こうした考察から，Solovay の定理の別証でも得られれば面白い．また，この文脈で考えたときに Rosser sentence がどうなるのかは興味深い．

References

[Je] Jech, T., *On Gödel's second incompleteness theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 311–313.

[Ki1] Kikuchi, M., *A note on Boolos' proof of the incompleteness theorem*, Math. Logic Quart. **40** (1994), 528–532.

[Ki2] ———, *Kolmogorov complexity and the second incompleteness theorem*, 京大数理解析研講究録 **912** (1995), 33–42.

[Ko] Kotlarski, H., *On the incompleteness theorems*, J. Symbolic Logic **59** (1994), 1414–1419.

[Kr] Kreisel, G., *Notes on arithmetical models for consistent formulae of the predicate calculus*, Fund. Math. **37** (1950), 265–285.

[Sm] Smoryński, C.A., *The incompleteness theorems*, Handbook of Math. Logic (J. Barwise, ed.), North-Holland, 1977, pp. 821–865.

657 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院 自然科学研究科
E-mail address: kikuchi@godel.seg.kobe-u.ac.jp